

Tema 1

- Il candidato descriva una metodologia numerica o analitica (anche approssimata) di formulazione, risoluzione e analisi qualitativa delle equazioni atte a descrivere un problema fisico d'interesse per l'ingegneria, evidenziando le ipotesi sotto le quali il problema è descrivibile con le stesse equazioni.
- Successivamente, il candidato affronti almeno uno dei seguenti esercizi:

Esercizio 1. Sia data la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare il sottospazio stabile, instabile e centrale per

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

e trovare quindi la soluzione del problema (1) con dato iniziale

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia dato il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3 \sin(x) - 2y \end{cases}$$

- Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- Dare un'interpretazione modellistica del problema e dei risultati ottenuti.
- Descrivere qualitativamente un metodo numerico *one step* che possa fornire la soluzione approssimata del problema di Cauchy associato.

Esercizio 3. Sia dato il problema in coordinate polari

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{per } \rho < 2, \\ u(2, \theta) = 3 \sin(2\theta) + 5 \cos(3\theta). \end{cases}$$

Ricordando che il Laplaciano in coordinate polari è dato da

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta},$$

trovare una soluzione del problema mediante l'analisi di Fourier.