

Tema 2

- I problemi dell'Ingegneria richiedono spesso la formulazione di modelli fisico–matematici atti a simulare i fenomeni dominanti, trascurandone altri. Con riferimento ad un problema specifico scelto, il candidato discuta criticamente il livello di approssimazione, con riferimento ad esempio, ma non esclusivamente, a formulazioni deboli/forti, continue/discrete, lineari/nonlineari.
- Successivamente, il candidato affronti almeno uno dei seguenti esercizi:

Esercizio 1. Sia data la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare il sottospazio stabile, instabile e centrale per

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

e trovare quindi la soluzione del problema (1) con dato iniziale

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia dato il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -5 \sin(x) - 4y \end{cases}$$

- Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- Dare un'interpretazione modellistica del problema e dei risultati ottenuti.
- Descrivere qualitativamente un metodo numerico *one step* che possa fornire la soluzione approssimata del problema di Cauchy associato.

Esercizio 3. Sia dato il problema in coordinate polari

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{per } \rho < 4, \\ u(4, \theta) = -3 \sin(4\theta) + \cos(5\theta). \end{cases}$$

Ricordando che il Laplaciano in coordinate polari è dato da

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta},$$

trovare una soluzione del problema mediante l'analisi di Fourier.