Prova di ammissione al dottorato in Matematica, XXVII ciclo

Tema 3

Esercizio A.

1. Definire la mappa di Gauss di una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.
2. Stabilire quale regione della sfera unitaria $\mathbb{S}^2$ di $\mathbb{R}^3$ è coperta dalla mappa di Gauss delle seguenti superfici:
   (a) paraboloide di rotazione $z = x^2 + y^2$;
   (b) iperboloide di rotazione $x^2 + y^2 = z^2 + 1$;
   (c) catenoide $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.
3. Trovare l'espressione della mappa di Gauss di una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$X(x, y) = (x, y, u(x, y)) \quad u \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

Esercizio B.
Data la quadrica reale

$$x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 3xy + 2xz + x + z - 1 = 0$$

1. Determinarne la classificazione affine.
2. Determinarne la classificazione proiettiva.

Esercizio C.

1. Sia $\mathbb{R}[|t|] = \{\sum_{n \geq 0} a_n t^n \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ l'anello delle serie di potenze formali a coefficienti reali. Dimostrare che $\mathbb{R}[|t|]$ è un dominio a fattorizzazione unica.

2. Sia A un qualsiasi anello commutativo unitario e sia $A[|t|] = \{\sum_{n \geq 0} a_n t^n \mid a_n \in A\}$ l'anello delle serie di potenze formali a coefficienti in A. Dimostrare che $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ è invertibile in $A[|t|]$ se e solo se a_0 è invertibile in A.

3. Sia F un campo e siano $x_1, \dots x_n$ indeterminate su F. Sia $F[x_1, \dots x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili a coefficienti in F. Siano $a_1, \dots a_n \in F$, dimostrare che gli ideali $(x_1 - a_1, \dots x_k - a_k)$, $k \leq n$, sono ideali primi di $F[x_1, \dots x_n]$. Dimostrare che $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ è massimale.

Esercizio D.
Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (y^2(t) - 1)e^{y^4(t)} \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha esistenza ed unicità locale di soluzione.

2. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si hanno soluzioni costanti.

3. Stabilire eventuali simmetrie della soluzione.

4. Dimostrare che le soluzioni sono monotone per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni sono globalmente definite.

Esercizio E.

1. Sia $\{X_n\}_n$ una catena di Markov con spazio degli stati $E = \mathbb{N}$ e con matrice di transizione data da

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

   (a) Classificare gli stati

(b) Dire se esistono le probabilità invarianti, giustificando la risposta.

2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. indipendenti tali che $X_i \sim \exp(\log(c^i))$ per $c > 1$. Dimostrare che la successione $n^2 \min(X_1, \ldots, X_n)$ converge in legge ed individuarne il limite.

Esercizio F

Un disco di massa m e raggio $r > 0$ rotola senza strisciare lungo una guida circolare di raggio R ($R > r$) fissa in un piano verticale ed e' soggetto alla forza peso. Il centro del disco é collegato agli assi del riferimento tramite due molle di uguali costanti elastiche $k > 0$, che si mantengono sempre parallele agli assi.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.
3. Studiare la stabilita' delle configurazioni di equilibrio