Prova di ammissione al dottorato in Matematica, XXVII ciclo

Tema 2

Esercizio A.

1. Enunciare il Teorema di Gauss-Bonnet globale per superfici regolari in $\mathbb{R}^3$.
2. Sia M una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ compatta connessa con curvature di Gauss $K > 0$ e siano γ_1 e γ_2 due geodetiche chiuse semplici di M. Dimostrare che γ_1 e γ_2 si intersecano.
3. Assumendo che la curvatura di Gauss della sfera di $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ sia costante, calcolarla usando il teorema di Gauss Bonnet.

Esercizio B.

1. Dare la definizione di matrice nilpotente.
2. Sia T una matrice di ordine n. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.
   (a) Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $T^n = Id$.
   (b) T ammette solo l'autovalore nullo.
   (c) $T^n \equiv 0$.

Esercizio C.

1. Dimostrare che l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un dominio a fattorizzazione unica, provando che è un anello dotato di divisione euclidea.

2. Nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, provare che 2,3,$1+\sqrt{-5}$ sono elementi irriducibili, che le unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sono esattamente ± 1, che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ esiste la fattorizzazione degli elementi ma non è unica.

3. Sia R l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Dimostrare che un numero primo p è un elemento primo di R se e solo se il polinomio $x^2 - 3$ è irriducibile in $F_p[x]$, dove $F_p[x] = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Esercizio D.
Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (y^4(t) - 1)e^{y^2(t)} \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha esistenza ed unicità locale di soluzione.
2. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si hanno soluzioni costanti.
3. Stabilire eventuali simmetrie della soluzione.
4. Dimostrare che le soluzioni sono monotone per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni sono globalmente definite.

Esercizio E.

1. Sia $\{X_n\}_n$ una catena di Markov con spazio degli stati $E = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tale che

$$\begin{array}{rcl} p_{1i} & = & \frac{1}{3^i}, \qquad i = 1, 2, \dots, \quad p_{11} = \frac{1}{2} \\ p_{i1} & = & 1 \qquad \forall i = 2, \dots \end{array}$$

   (a) Classificare gli stati
   (b) Qualora la catena fosse persistente, dire se è persistente positiva
   (c) Calcolare le distribuzioni invarianti.

2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. indipendenti ed identicamente distribuita tali che $X_i \sim \exp(4)$. Dimostrare che la successione $\exp\{n \max(X_1, \dots, X_n)\}$ converge in legge ed individuarne il limite.

Esercizio F.
Si consideri un sistema di assi cartesiano ortogonale $Oxyz$, con l'asse z diretto come la verticale ascendente e sia P un punto materiale di massa m vincolato a muoversi senza attrito su un ellissoide di rotazione intorno all'asse z. Facendo uso delle coordinate $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, l'equazione per l'ellissoide (escludendo i due poli) si scrive

$$x = a \sin\theta \cos\phi, \quad y = a \sin\theta \sin\phi, \quad z = c \cos\theta$$

con $c > a > 0$. Il punto P e' legato ai due punti fissi $Q_1 = (l, 0, 0)$ e $Q_2 = (0, 0, h)$, con $l, h > c$, mediante due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.

2. Posto $mg = kh$, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema nella regione di validita' delle coordinate θ, ϕ.

3. Studiare la stabilita' della configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$.

4. Posto l'ulteriore vincolo $\theta = \frac{\pi}{2}$, studiare qualitativamente le orbite nel piano delle fasi del corrispondente problema unidimensionale.