Prova di ammissione al dottorato in Matematica, XXVII ciclo

Tema 1

Esercizio A.

1. Definire la curvatura media H e la curvatura di Gauss K di una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

2. Mostrare che se S ha curvatura media zero, allora la sua curvatura di Gauss é minore o uguale a zero.

3. Sia S la superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$X(x,y) = (x, y, u(x,y)) \quad u \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

Mostrare che la curvatura media H della superficie S é data dalla seguente espressione:

$$u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2) = 2H(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio B.

1. Dare la definizione di polinomio caratteristico di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

2. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che il $rango(A) = 1$. Dimostrare che A é diagonalizzabile se e solo se $tr(A) \neq 0$.

Esercizio C.

1. Dimostrare che x^2-3 è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$, calcolare $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ ed esibire un a base di $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$

2. Sia p un primo dispari e sia $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{p}}$. Dimostrare che ζ è algebrica su $\mathbb{Q}$ ed individuate il polinomio monico, irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ di cui ζ è radice.

3. Sia A un anello commutativo unitario ed $x \in A$ nilpotente (ossia $x^n = 0$ per qualche $n \geq 1$). Mostrare che $1 + x$ è invertibile e dedurre che la somma di un nilpotente e di un invertibile è sempre invertibile.

Esercizio D.

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (y^2(t) - 1)e^{y^2(t)} \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha esistenza ed unicità locale di soluzione.
2. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si hanno soluzioni costanti.
3. Stabilire eventuali simmetrie della soluzione.
4. Dimostrare che le soluzioni sono monotone per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni sono globalmente definite.

Esercizio E.

1. Sia $\{X_n\}_n$ una catena di Markov con spazio degli stati $\mathbb{N}$ con le seguenti probabilità di transizione non nulle

$$p_{i0} = \frac{3}{4}, \quad p_{i,i+1} = \frac{1}{4}, \quad \forall\ i = 0, 1, ...$$

   (a) Classificare il carattere degli stati.
   (b) Dire se esistono probabilità invarianti ed in caso calcolarle.
   (c) Dire se vale il teorema ergodico.

2. Si consideri una successione di v.a. $\{X_n\}_n$ indipendenti e i.d. con funzione di densità data da $f(x) = 4x^3\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Dimostrare che la successione $(X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}$ converge in legge e q.o. ed individuarne il limite.

Esercizio F.
Si consideri un sistema fisso di coordinate in un piano verticale, con l'asse delle ordinate diretto come la verticale ascendente. Lungo tale asse e' libero di scorrere senza attrito un punto materiale P_1 di massa m_1. Il punto P_1 e' inoltre il centro di una circonferenza $\mathcal{C}$ senza massa di raggio l. Su $\mathcal{C}$ si muove senza attrito un altro punto materiale P_2 di massa m_2. I punti P_1 e P_2 sono inoltre collegati con l'origine O del sistema di coordinate mediante due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.

2. Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilita' al variare del parametro $\alpha = \frac{(m_2 - m_1)g}{kl}$.

3. Si introduca un ulteriore vincolo supponendo che il punto P_1 abbia coordinate $(0, -a)$, con a costante positiva. Si studino le orbite nel piano delle fasi del corrispondente sistema unidimensionale. Si determinino in particolare le condizioni iniziali per cui il moto di P_2 non e' periodico. Si verifichi infine se e' possibile un moto circolare uniforme per P_2.