

## Tema 3

- Il candidato rediga un progetto di ricerca, a carattere fisico–matematico, relativo ad un problema d’ingegneria, illustrando, nell’ordine, i seguenti aspetti: motivazioni tecniche e scientifiche, obiettivi da raggiungere, metodologia d’indagine impiegata, risultati disponibili, risultati attesi.
- Successivamente, il candidato affronti almeno uno dei seguenti esercizi:

**Esercizio 1.** Sia data la matrice  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare il sottospazio stabile, instabile e centrale per

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

e trovare quindi la soluzione del problema (1) con dato iniziale

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Sia dato il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -11 \sin(x) - 6y \end{cases}$$

- Determinare i punti d’equilibrio e discuterne la stabilità.
- Dare un’interpretazione modellistica del problema e dei risultati ottenuti.
- Descrivere qualitativamente un metodo numerico *one step* che possa fornire la soluzione approssimata del problema di Cauchy associato.

**Esercizio 3.** Sia dato il problema in coordinate polari

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{per } \rho < 6, \\ u(6, \theta) = \sin(8\theta) - 5 \cos(7\theta). \end{cases}$$

Ricordando che il Laplaciano in coordinate polari è dato da

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta},$$

trovare una soluzione del problema mediante l’analisi di Fourier.