Dottorato di Ricerca in Matematica

XXIII ciclo, A.A. 2007/08 – L'Aquila, 9 ottobre 2007

Compito A

Il candidato risolva alcuni degli esercizi tra quelli la cui numerazione ha il prefisso **A** e un solo esercizio tra quelli la cui numerazione ha il prefisso **B**.

In alternativa il candidato può scegliere di trattare il tema e di risolvere alcuni degli esercizi.

Tema

Interazioni tra la matematica e le scienze della vita: il candidato illustri il tema attraverso esemplificazioni.

Esercizio A1

Dimostrare o confutare la seguente proposizione:

esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, tale che $|f'(x)| \leq 1$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$.

Esercizio A2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t)\sqrt{y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio A3

Si supponga di voler calcolare l'inverso di un numero reale $a \neq 0$ e di disporre di un calcolatore che possiede solamente le 3 operazioni $+, -, \times$. Si proponga un metodo iterativo del tipo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ per approssimare il valore $1/a$ con una accuratezza fissata arbitrariamente. Si applichi il procedimento per approssimare $\dfrac{1}{7}$ con una accuratezza di 5 cifre significative.

Esercizio A4

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Provare che:

(a) se A è tale che $A^2 = A$ e λ è un autovalore di A, allora $\lambda = 0, 1$;

(b) se A è diagonalizzabile e ogni autovalore di A è 0 o 1, allora $A^2 = A$.

Esercizio A5

Sia S la superficie parmetrizzata da $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}$ così definita

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^2 u_2^2)$$

(a) Si determinino la prima e la seconda forma fondamentale di S.

(b) Si dica se S ha punti ellittici e si determini il luogo dei punti parabolici.

(c) Si dica in quali punti di S le direzioni coordinate siano principali.

Esercizio A6

Dimostrare che il gruppo degli automorfismi di un guppo ciclico di ordine n

(a) ha ordine $\varphi(n)$ dove φ è la funzione di Eulero;

(b) è isomorfo al gruppo moltiplicativo di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Esercizio A7

Quattro città A, B, C, D sono collegate fra loro come in figura

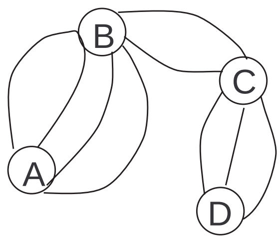

Figura 1:

Ad ogni linea corrisponde una strada. Ognuna di queste strade è interrotta con probabilità p indipendentemente dallo stato delle altre strade. Calcolare la probabilità che sia possibile andare dalla città A alla città D. Calcolare la probabilità che sia possibile andare da A a D condizionata al fatto che è possibile andare da B a C.

Un commesso viaggiatore vive in A ed ha 3 clienti in B, 2 clienti in C e 7 clienti in D. Ogni cliente raggiunto corrisponde ad un guadagno pari a Δ. Calcolare il guadagno medio.

Esercizio A8

Due punti materiali P_1, P_2 entrambi di massa $m = 1$ si muovono senza attrito lungo una retta γ. I due punti sono legati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; inoltre il punto P_1 è legato ad un punto fisso O di γ da un'altra molla, sempre di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità. Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile. Si discuta poi come si modificano le posizioni di equilibrio e le frequenze quando sul sistema agisce una forza costante diretta lungo γ.

Esercizio B1

Sia $H = L^2(0,T)$, $T > 0$, e si consideri l'operatore $\mathcal{S} : H \longrightarrow H$ definito come

$$(\mathcal{S}u)(t) = \frac{d^2u}{dt^2}$$

con dominio di definizione

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \left\{ u \in H \ : \ u, \frac{du}{dt} \in \mathcal{AC}(0,T), \ \frac{d^2u}{dt^2} \in H, \ u(0) = u(T) = 0 \right\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{S}$ è autoaggiunto.

Esercizio B2

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineare a coefficienti costanti $\dot{y} = Ay$ ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$). Per la sua soluzione numerica si consideri un metodo a un passo applicato con passo costante h, $y_{n+1} = R(h\,A)y_n$ con R funzione razionale. Supponendo che il metodo sia A-stabile, ossia tale che $|R(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}(z) \leq 0$, si dimostri, utilizzando la trasformazione di A nella sua forma canonica di Jordan, che

a) se il sistema lineare è stabile allora la successione di approssimazioni numeriche $\{y_n\}$ è limitata;

b) se il sistema è asintoticamente stabile allora la successione $\{y_n\}$ tende a zero.

Esercizio B3

Siano $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^3$ rispettivamente la retta e lo spazio proiettivo complesso. Sia $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ la mappa così definita

$$\sigma((s_0, s_1), (t_0, t_1))) = (s_0t_0, s_0t_1, s_1t_0, s_1t_1)$$

e sia $S = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$.

(a) Verificare che S è una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$.

(b) Provare che ogni quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(c) Verificare che in S esistono due famiglie di rette e determinarne le equazioni.

Esercizio B4

Dato un campo $\mathbb{K}$ dimostrare che un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ si scrive come prodotto di fattori lineari distinti in qualche estensione di $\mathbb{K}$ se e solo se $p(x)$ è coprimo con il suo polinomio derivato $p'(x)$.

Esercizio B5

Siano X_i (con i un indice che varia nell'insieme dei numeri interi ≥ 1) variabili casuali indipendenti di Bernoulli (ovvero possono assumere solamente i valori 0 ed 1) tali che $P(X_i = 1) = \frac{1}{2i^\alpha}$ con $\alpha \geq 0$ parametro reale.

Calcolare la probabilità che almeno una delle prime n variabili casuali X_i assuma il valore 0. Si determini la distribuzione delle variabili casuali $M_n = \max\{X_i, \ i = 1, \ldots, n\}$.

Siano $0 < a < b$ numeri reali. Si determini il valore del parametro β affinchè il seguente limite sia finito e diverso da zero ed in tal caso lo si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} n^\beta E\left(\sum_{\{i:\ a<\frac{i}{n}<b\}} X_i\right)$$

Con E qui si indica il valore medio. Al variare del paramentro α si determini la probabilità che tutte le variabili casuali assumano il valore 0 e la probabilità che solamente un numero finito di variabili casuali X_i assuma il valore 1.
Nel caso $\alpha = 0$ si discuta il comportamento asintotico al crescere di n delle variabili casuali $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ e si determini

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{3}{4}\right)$$

Esercizio B6

Un disco omogeneo di massa M, centro C e raggio R si muove in un piano verticale e rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sul bordo del disco. Sul sistema agisce la forza peso. Si denoti con θ l'angolo, contato in senso antiorario, che CP forma con la verticale discendente.

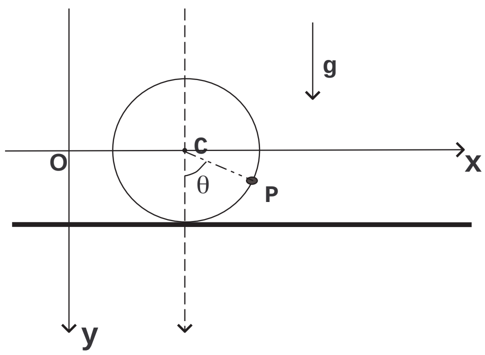

Figura 2:

1 Scrivere la Lagrangiana del sistema

2 Determinare i due integrali primi

3 Discutere le simmetrie associate agli integrali primi

4 Si determini l'equazione del moto per $\theta(t)$ quando inizialmente sia il disco che il punto P sono in quiete.

5 Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni per θ, si determini se il periodo di tale moto è maggiore del periodo del moto nel limite in cui la massa del disco M va a infinito.

Esercizio B7

Trovare la funzione di Green per il settore espresso in coordinate polari (r, ϑ) da $0 < r < R$, $0 < \vartheta < \pi/3$.

Dottorato di Ricerca in Matematica

XXIII ciclo, A.A. 2007/08 – L'Aquila, 9 ottobre 2007

Compito B

Il candidato risolva alcuni degli esercizi tra quelli la cui numerazione ha il prefisso **A** e un solo esercizio tra quelli la cui numerazione ha il prefisso **B**.

In alternativa il candidato può scegliere di trattare il tema e di risolvere alcuni degli esercizi.

Tema

Interazioni tra la matematica e le scienze della vita: il cadidato illustri gli aspetti modellistici e le ricadute per la collettività di una attività di ricerca che rientra in tale contesto e della quale ha cognizione.

Esercizio A1

Dimostrare che l'anello delle matrici 2×2 a entrate reali non ha ideali propri non banali.

Esercizio A2

Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ due matrici $n \times n$ a entrate in K.

(a) Provare che le matrici AB e BA hanno gli stessi autovalori e gli stessi polinomi caratteristici.

(b) Si provi inoltre che se una delle matrici A, B è invertibile allora AB e BA sono coniugate.

Esercizio A3

Sia S la superficie parmetrizzata da $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}$ così definita

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1^2 u_2^2, u_1, u_2)$$

(a) Si calcoli la prima e la seconda forma fondamentale di S.

(b) Si dica in quali punti di S le direzioni coordinate siano principali e in tali punti si calcolino le curvature principali.

Esercizio A4

Dimostrare o confutare la seguente proposizione:

esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, tale che $|f'(x)| \leq 1$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$.

Esercizio A5

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(2t)\sqrt{y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio A6

Si supponga di voler calcolare la radice cubica di un numero reale a e di disporre di un calcolatore che possiede solamente le 4 operazioni $+, -, \times, :$. Si proponga un metodo iterativo del tipo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ per approssimare il valore $a^{1/3}$ con una accuratezza fissata arbitrariamente. Si applichi il procedimento per approssimare $5^{1/3}$ con una accuratezza di 5 cifre significative.

Esercizio A7

Quattro città A, B, C, D sono collegate fra loro come in figura

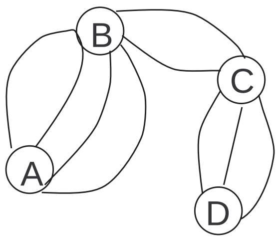

Figura 1:

Ad ogni linea corrisponde una strada. Ognuna di queste strade è interrotta con probabilità p indipendentemente dallo stato delle altre strade. Calcolare la probabilità che sia possibile andare dalla città A alla città D. Calcolare la probabilità che sia possibile andare da A a D condizionata al fatto che è possibile andare da B a C.

Un commesso viaggiatore vive in A ed ha un cliente in B, 3 clienti in C e 10 clienti in D. Ogni cliente raggiunto corrisponde ad un guadagno pari a Δ. Calcolare il guadagno medio.

Esercizio A8

Due punti materiali P_1, P_2 entrambi di massa $m = 1$ si muovono senza attrito lungo una retta γ. I due punti sono legati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; inoltre il punto P_1 è legato ad un punto fisso O di γ da un'altra molla, di costante elastica $2k$ e lunghezza a riposo nulla.

Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità. Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile. Si discuta poi come si modificano le posizioni di equilibrio e le frequenze quando sul sistema agisce una forza costante diretta lungo γ.

Esercizio B1

Calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^s} dx, \qquad s > 0.$$

Esercizio B2

Sia $H = L^2(0,1)$ e si consideri l'operatore $\mathcal{S} : H \longrightarrow H$ definito come

$$(\mathcal{S}u)(t) = \frac{d^2u}{dt^2}$$

con dominio di definizione

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \left\{ u \in H \;:\; u, \frac{du}{dt} \in \mathcal{AC}(0,1),\; \frac{d^2u}{dt^2} \in H,\; u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{S}$ è autoaggiunto.

Esercizio B3

Per la soluzione approssimata del problema di Cauchy

$$\dot{y}(t) = f\Big(t, y(t)\Big), \quad y(t_0) = y_0,$$

sull'insieme di punti $\{t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T\}$, si consideri il seguente metodo Runge–Kutta (per $1 \leq n \leq N-1$)

$$\begin{aligned}
K_1 &= f\Big(t_n, y_n + \frac{1}{2}\, h_n\,(K_1 - K_2)\Big) \\
K_2 &= f\Big(t_n + h_n, y_n + \frac{1}{2}\, h_n\,(K_1 + K_2)\Big) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}\, h_n\,(K_1 + K_2)\,.
\end{aligned}$$

con $h_n = t_{n+1} - t_n$.

a) Si determini l'ordine del metodo e si verifichi che il metodo è convergente;

b) Si applichi il metodo al problema $y'(t) = \lambda\, y(t),\; y(0) = 1,\; t \geq 0$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ e con passo costante h. Dopodichè si determini (eventualmente in modo qualitativo) l'insieme dei numeri complessi $z = h\,\lambda$ per cui la soluzione numerica è asintoticamente stabile, cioè tali che $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Esercizio B4

Siano $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^3$ rispettivamente la retta e lo spazio proiettivo complesso. Sia $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ la mappa così definita

$$\sigma((s_0, s_1), (t_0, t_1))) = (s_0t_0, s_0t_1, s_1t_0, s_1t_1)$$

e sia $S = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$.

(a) Verificare che S è una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$.

(b) Provare che ogni quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(c) Verificare che in S esistono due famiglie di rette e determinarne le equazioni.

Esercizio B5

Dato un campo $\mathbb{K}$ dimostrare che un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ si scrive come prodotto di fattori lineari distinti in qualche estensione di $\mathbb{K}$ se e solo se $p(x)$ è coprimo con il suo polinomio derivato $p'(x)$.

Esercizio B6

Un disco omogeneo di massa M, centro C e raggio R si muove in un piano verticale e rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sul bordo del disco. Sul sistema agisce la forza peso. Si denoti con θ l'angolo, contato in senso antiorario, che CP forma con la verticale discendente.

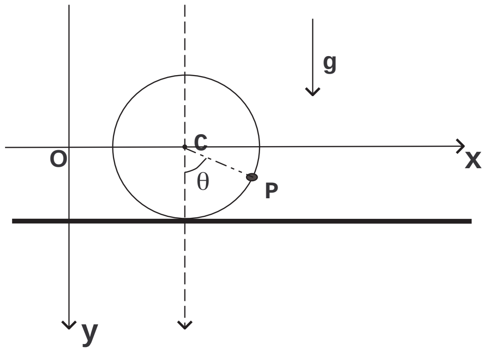

Figura 2:

1 Scrivere la Lagrangiana del sistema

2 Determinare i due integrali primi

3 Discutere le simmetrie associate agli integrali primi

4 Si determini l'equazione del moto per $\theta(t)$ quando inizialmente sia il disco che il punto P sono in quiete.

5 Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni per θ, si determini se il periodo di tale moto è maggiore del periodo del moto in cui il disco è tenuto fisso.

Esercizio B7

Siano X_i (con i un indice che varia nell'insieme dei numeri interi ≥ 1) variabili casuali indipendenti di Bernoulli (ovvero possono assumere solamente i valori 0 ed 1) tali che $P(X_i = 1) = \frac{1}{2i^\alpha}$ con $\alpha \geq 0$ parametro reale.

Calcolare la probabilità che almeno una delle prime n variabili casuali X_i assuma il valore 0. Si determini la distribuzione delle variabili casuali $M_n = \max\{X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Siano $0 < a < b$ numeri reali. Si determini il valore del parametro β affinchè il seguente limite sia finito e diverso da zero ed in tal caso lo si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} n^\beta E\left(\sum_{\{i:\ a<\frac{i}{n}<b\}} X_i\right)$$

Con E qui si indica il valore medio. Al variare del paramentro α si determini la probabilità che tutte le variabili casuali assumano il valore 0 e la probabilità che solamente un numero finito di variabili casuali X_i assuma il valore 1.

Nel caso $\alpha = 0$ si discuta il comportamento asintotico al crescere di n delle variabili casuali $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ e si determini

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{3}{4}\right)$$

Dottorato di Ricerca in Matematica

XXIII ciclo, A.A. 2007/08 – L'Aquila, 9 ottobre 2007

Compito C

Il candidato risolva alcuni degli esercizi tra quelli la cui numerazione ha il prefisso **A** e un solo esercizio tra quelli la cui numerazione ha il prefisso **B**.

In alternativa il candidato può scegliere di trattare il tema e di risolvere alcuni degli esercizi.

Tema

Partendo dalla descrizione di un problema di interesse per la biomatematica, il candidato ne illustri la modellazione fisica e matematica.

Esercizio A1

Dimostrare o confutare la seguente proposizione:

esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^3(\mathbb{R})$, tale che $|f'(x)| \leq 1$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$.

Esercizio A2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(3t)\sqrt{y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio A3

Si supponga di voler calcolare la radice cubica di un numero reale $a > 0$ e di disporre di un calcolatore che possiede solamente le 4 operazioni $+, -, \times, :$. Si proponga un metodo iterativo del tipo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ per approssimare il valore $a^{1/2}$ con una accuratezza fissata arbitrariamente. Si applichi il procedimento per approssimare $3^{1/2}$ con una accuratezza di 5 cifre significative.

Esercizio A4

Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ due matrici $n \times n$ a entrate in K.

(a) Provare che le matrici AB e BA hanno gli stessi autovalori e gli stessi polinomi caratteristici.

(b) Si provi inoltre che se una delle matrici A, B è invertibile allora AB e BA sono coniugate.

Esercizio A5

Sia S la superficie parmetrizzata da $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}$ così definita

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1^2, u_1 u_2^2, u_2)$$

(a) Si calcoli la prima e la seconda forma fondamentale di S.

(b) Si classifichino i punti di S come punti ellittici, parabolici, iperbolici, planari.

Esercizio A6

Sia p un numero primo. Provare che un gruppo ciclico di ordine p ha esattamente $p-1$ automorfismi.

Esercizio A7

Quattro città A, B, C, D sono collegate fra loro come in figura

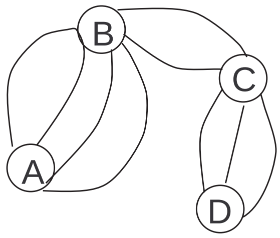

Figura 1:

Ad ogni linea corrisponde una strada. Ognuna di queste strade è interrotta con probabilità p indipendentemente dallo stato delle altre strade. Calcolare la probabilità che sia possibile andare dalla città A alla città D. Calcolare la probabilità che sia possibile andare da A a D condizionata al fatto che è possibile andare da B a C.

Un commesso viaggiatore vive in A ed ha 2 clienti in B, 5 clienti in C e 6 clienti in D. Ogni cliente raggiunto corrisponde ad un guadagno pari a Δ. Calcolare il guadagno medio.

Esercizio A8

Due punti materiali P_1, P_2 entrambi di di massa $m = 3$ si muovono senza attrito lungo una retta γ. I due punti sono legati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; inoltre il punto P_1 è legato ad un punto fisso O di γ da un'altra molla, sempre di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità. Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile. Si discuta poi come si modificano le posizioni di equilibrio e le frequenze quando sul sistema agisce una forza costante diretta lungo γ.

Esercizio B1

Dato un campo $\mathbb{K}$ dimostrare che un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ si scrive come prodotto di fattori lineari distinti in qualche estensione di $\mathbb{K}$ se e solo se $p(x)$ è coprimo con il suo polinomio derivato $p'(x)$.

Esercizio B2

Siano X_i (con i un indice che varia nell'insieme dei numeri interi ≥ 1) variabili casuali indipendenti di Bernoulli (ovvero possono assumere solamente i valori 0 ed 1) tali che $P(X_i = 1) = \frac{1}{2i^\alpha}$ con $\alpha \geq 0$ parametro reale.

Calcolare la probabilità che almeno una delle prime n variabili casuali X_i assuma il valore 0. Si determini la distribuzione delle variabili casuali $M_n = \max\{X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Siano $0 < a < b$ numeri reali. Si determini il valore del parametro β affinchè il seguente limite sia finito e diverso da zero ed in tal caso lo si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} n^\beta E\left(\sum_{\{i:\ a<\frac{i}{n}<b\}} X_i\right)$$

Con E qui si indica il valore medio. Al variare del paramentro α si determini la probabilità che tutte le variabili casuali assumano il valore 0 e la probabilità che solamente un numero finito di variabili casuali X_i assuma il valore 1.

Nel caso $\alpha = 0$ si discuta il comportamento asintotico al crescere di n delle variabili casuali $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ e si determini

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{3}{4}\right)$$

Esercizio B3

Un disco omogeneo di massa M, centro C e raggio R si muove in un piano verticale e rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un punto materiale P di massa $m = M/4$ è vincolato a scorrere senza attrito sul bordo del disco. Sul sistema agisce la forza peso. Si denoti con θ l'angolo, contato in senso antiorario, che CP forma con la verticale discendente.

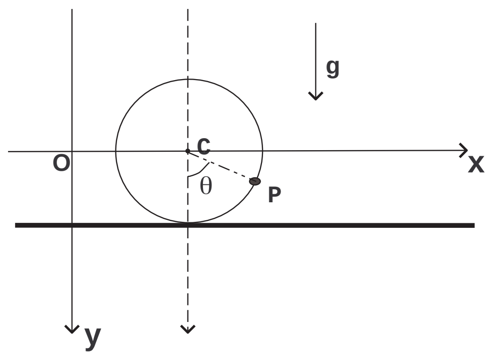

Figura 2:

1 Scrivere la Lagrangiana del sistema

2 Determinare i due integrali primi

3 Discutere le simmetrie associate agli integrali primi

4 Si determini l'equazione del moto per $\theta(t)$ quando inizialmente sia il disco che il punto P sono in quiete.

5 Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni per θ, si determini se il periodo di tale moto è maggiore del periodo del moto in cui il punto P è solidale con il disco.

Esercizio B4

Sia $H = L^2(0,\pi)$ e si consideri l'operatore $\mathcal{S} : H \longrightarrow H$ definito come

$$(\mathcal{S}u)\,(t) = \frac{d^2u}{dt^2}$$

con dominio di definizione

$$\mathcal{D}\,(\mathcal{S}) = \left\{ u \in H \;:\; u, \frac{du}{dt} \in \mathcal{AC}(0,\pi),\; \frac{d^2u}{dt^2} \in H,\; u(0) = u(\pi) = 0 \right\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{S}$ è autoaggiunto.

Esercizio B5

Per la soluzione approssimata del problema di Cauchy

$$\dot{y}(t) = f\Big(t, y(t)\Big), \quad y(t_0) = y_0,$$

sull'insieme di punti $\{t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T\}$, si consideri il seguente metodo Runge–Kutta (per $1 \leq n \leq N-1$)

$$\begin{aligned} K_1 &= f\Big(t_n, y_n\Big) \\ K_2 &= f\Big(t_n + h_n, y_n + \frac{1}{2}\,h_n\,(K_1 + K_2)\Big) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}\,h_n\,(K_1 + K_2)\,. \end{aligned}$$

con $h_n = t_{n+1} - t_n$.

a) Si determini l'ordine del metodo e si verifichi che il metodo è convergente;

b) Si applichi il metodo al problema $y'(t) = \lambda\, y(t),\; y(0) = 1,\; t \geq 0$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ e con passo costante h. Dopodichè si determini (eventualmente in modo qualitativo) l'insieme dei numeri complessi $z = h\,\lambda$ per cui la soluzione numerica è asintoticamente stabile, cioè tali che $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Esercizio B6

Siano $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^3$ rispettivamente la retta e lo spazio proiettivo complesso. Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ la mappa così definita

$$f((s,t)) = (s^3, s^2t, st^2, t^3)$$

e sia $X = f(\mathbb{P}^1)$.

(a) Verificare che per X passano le quadriche di una rete e scrivere l'equazione della rete.

(b) Sia $R = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3$ la rete determinata in (a). Provare che per $i \neq j$ le quadriche Q_i, Q_j si intersecano nell'unione di X e di una retta L.

Esercizio B7

Mostrare che vale un principio del massimo per le soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$